A skatulyaelv alkalmazása

Bevezető feladatok

51. feladat

Egy tíztagú társaságról tudjuk, hogy minden tagja legalább hét másikat ismer.

a) Igazoljuk, hogy a társaságból bármely három személynek van közös ismerőse.

b) Hogyan általánosítható a feladat? Fogalmazzuk meg az általános állítást gráfelméleti nyelven!

Az 51. feladat megoldása

a) Tekintsük a gráf komplementerét! Ez olyan 10 csúcsú gráf, amelyben minden pont foka legfeljebb 2. Így bármely három pontból összesen legfeljebb 6 él megy a maradék hét csúcshoz. Tehát bármely három csúcshoz található olyan csúcs a maradék hét közül, amelyikkel a vizsgált három csúcs egyike sincs összekötve. Ez az eredeti gráfban épp a feladat állítását jelenti.

b) Tételünk:

Ha egy n tagú társaság minden tagjának legalább k ismerőse van abban a társaságban, akkor a társaság bármelyik v tagjának van a társaságban m közös ismerőse.

Az n, k, v, m pozitív egész paraméterek mely értékei esetén igaz a fenti tétel, ha még értelemszerűen $v>1$, $n>\max(k, v)$? Erre nem válaszolunk teljes pontossággal, de megadunk egy olyan algebrai feltételt, amelynek teljesülése esetén a tétel is igaz.

Alkalmazzuk az a) esetben leírt gondolatmenetet vizsgáljuk a komplementer gráfot! Abban is n csúcs van, de ott minden csúcs foka legfeljebb
(n-1-k). Bármely v db ember a többiek közül összesen legfeljebb $v\cdot(n-1-k)$-t ismer. Tehát ha

$$v + v\cdot(n-1-k) + m \le n,$$

akkor biztosan igaz a tétel. A fenti feltétel n-re is rendezhetjük:

$$\max(k,v)+1 \le n \le k + \frac{k-m}{v-1}.$$

Az a) feladat a k=7, v=3, m=1 paraméterértékekhez tartozik és azt mondja ki, hogy ha 8, 9 vagy 10 tagú társaságban minden embernek legalább 7 ismerőse van, akkor bármelyik három embernek van legalább egy közös ismerőse.

52. feladat