Nemzetközi Kenguru Matematikatábor

2015. augusztus 21—29., Werbellinsee, Németország

BESZÁMOLÓ

Bevezető

Idén tizenegyedik alkalommal került megrendezésre a Nemzetközi Kenguru Matematikatábor (11. Internationale Känguru Mathecamp) a Berlintől északra lévő Werbellinsee partján.

Ebben az évben 64 diák kapott meghívást és vett részt a tábor programjában. A magyarokon kívül németek, osztrákok, svájciak, hollandok, csehek, szlovákok és lengyelek képviseltették magukat. A meghívás az országos Kenguru-versenyek eredményei alapján történik, de a meghívási kritériumok jelentősen különböznek országonként, ennek következtében a résztvevők matematikai háttere is nagyon különböző..

A tábort a berlini Humboldt Universität munkatársai szervezték, a tábor vezetője idén is Alexander Unger volt.

Szakmai programok

Szombattól péntekig minden nap — kedd kivételével — két 90 perces matematika program volt a diákok számára. Egy csoport egy adott napon mind a két 90 perces részben ugyanazzal a témával foglalkozott.

A diákokat négy csoportba osztották, minden csoportban 16 diák dolgozott együtt. A csoportok beosztását többnyire a gyerekek maguk végzik, csak nemzeti megkötés van, vagyis rögzítve van, hogy melyik csoportban hány diák lehet egy adott nemzetből.

A szakmai program az alábbiak szerint alakult a hét során:

<table>
<tr><th></th><th>1. csoport</th><th>2. csoport</th><th>3. csoport</th><th>4. csoport</th></tr>
<tr><td>Szo</td><td>Ysette Weiss-Pydstrigach / Rainer Kaenders:
Lift the Treasure of Captain Lill</td><td>Peter Ypma:
Waiting Room</td><td>Axel Schüler:
Geometric Constructions and Proofs via Motions</td><td>Stephan Berendonk:
Visitors from the 4th Dimension</td></tr>
<tr><td>V</td><td>Stephan Berendonk:
Visitors from the 4th Dimension</td><td>Ysette Weiss-Pydstrigach / Rainer Kaenders:
Lift the Treasure of Captain Lill</td><td>Martin Altmann:
SET theory</td><td>Axel Schüler:
Geometric Constructions and Proofs via Motions</td></tr>
<tr><td>H</td><td>Djurre Tijsma:
Problem Solving with Invariance</td><td>Stephan Berendonk:
Visitors from the 4th Dimension</td><td>Ysette Weiss-Pydstrigach / Rainer Kaenders:
Lift the Treasure of Captain Lill</td><td>Martin Altmann:
SET theory</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Sze</td><td rowspan="2">Alexander Fauck:
Graphs and Colorings of Surfaces</td><td rowspan="2">Charles Dunn:
Projective Geometry</td><td>Peter Ypma:
Waiting Room</td><td>Djurre Tijsma:
Problem Solving with Invariance</td></tr>
<tr><td>Djurre Tijsma:
Problem Solving with Invariance</td><td>Peter Ypma:
Waiting Room</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Cs</td><td rowspan="2">Charles Dunn:
Projective Geometry</td><td rowspan="2">Alexander Fauck:
Graphs and Colorings of Surfaces</td><td>Peter Ypma:
Waiting Room</td><td>Djurre Tijsma:
Problem Solving with Invariance</td></tr>
<tr><td>Djurre Tijsma:
Problem Solving with Invariance</td><td>Peter Ypma:
Waiting Room</td></tr>
<tr><td rowspan="2">P</td><td>Alexander Fauck:
Graphs and Colorings of Surfaces</td><td>Charles Dunn:
Projective Geometry</td><td rowspan="2">Stephan Berendonk:
Visitors from the 4th Dimension</td><td rowspan="2">Ysette Weiss-Pydstrigach / Rainer Kaenders:
Lift the Treasure of Captain Lill</td></tr>
<tr><td>Charles Dunn:
Projective Geometry</td><td>Alexander Fauck:
Graphs and Colorings of Surfaces</td></tr>
</table>

A szakmai program részének tekinthető a Speed Cangaroo Competition és a Werbellinsee-Team-Competition. Az előbbi szombat este került megrendezésre, míg az utóbbi verseny feladatait péntek este kapták meg a csapatok és csütörtök reggel volt a beadási határidő. (A dokumentum végén mindkét verseny feladatai megtalálhatók.)

A Speed Competitiont sikeresen teljesítették a magyarok, a második és az egyik harmadik helyezett csapatnak is volt magyar tagja. Összesen 14 csapatban versenyeztek a diákok.

A Werbellinsee-Team-Competition feladatait a magyar csapat kivétel nélkül megoldotta és sikerült a megoldásokat is leírni angolul a határidő lejárta előtt. Az idei feladatsor hosszú évek óta először érdemben eldöntötte a versenyt, nem apróságokon múlt az első hely sorsa. Mivel a magyar csapat minden feladatot hibátlanul megoldott, így megnyerte a versenyt. A végső sorrend a következő volt:

1. Magyarország (35 pont)
2. Németország (28 pont)
3. Csehország (26 pont)
4. Lengyelország (25 pont)
5. Hollandia (23 pont)
6. Svájc (20 pont)
7. Ausztria (17 pont)
8. Szlovákia (3 pont)

A feladatok megoldásait ismertetni is kellett. A magyar csapatnak a harmadik feladat jutott. Baran Zsuzsa ismertette a résztvevők számára a magyar csapat megoldását.

Szabadidős programok

Délutánonként többnyire matematikától független szabadidős tevékenységek végzésére nyílt lehetőség.

Szombat délután még nem indultak be a programok, mindenki ismerkedett a helyszínnel és a többi résztvevővel.

A magyar csapat szombat délután biciklikat bérelt és a Werbellinsee-t, illetve a tőle északra fekvő Grimnitzsee-t meg is kerülték egy 4 órás biciklizés során.

Este került megrendezésre a Speed Kangaroo Competition. Ebben a versenyben véletlenszerűen sorsolják össze a csapatokat, minden csapat 4 vagy 5 főből áll, és egy nemzetből legfeljebb egy diák lehet a csapat tagja. A verseny során 30 kérdést kapnak a csapatok, de egyszerre mindig csak egyet látnak. Két kísérletük van a jó válasz megtalálására. Ha jól válaszolnak, vagy másodszor is rosszul tippelnek, akkor kapják a következő feladatot. (Egyszer tehát büntetlenül lehet tévedni.) A verseny 2,5n perccel azután ér véget, amikor az első csapat mind a 30 kérdéssel végzett, és n kérdésre adtak rossz választ. A magyarok jól szerepeltek a versenyen, a 14 csapatból a második és az egyik harmadik helyezett csapatnak is volt magyar tagja. (A győztes csapat mind a 30 kérdésre felelt jól.)

Két magyar induló volt a sakkversenyben, ami 7 fordulós, svájci rendszerű volt és összesen 16 játékos vett részt benne. Szombat este zajlott az első két forduló. Idén először tandemsakkbajnokságot is volt a táborban, 7 pár részvételével. A párok többsége itt ismerkedett meg a játékkal. Szombat este le is zajlott a teljes körmérkőzéses bajnokság első két fordulója.

Vasárnap délután a teljes tábor meglátogatta a Niederfinow-ban található „hajóliftet" (Schiffshebewerk), ami egy 36 méteres szintkülönbséget hidal át a hajók számára a Havelt és az Oderát összekötő csatornán, és egy építészeti kuriózum az 1930-as évek elejéről. Mielőtt hajóra szálltunk jól elázott szinte mindenki egy heves zápornak köszönhetően. A lifttel először felmentünk a csatorna magasabban fekvő részére, majd visszajöttünk a kiindulás helyére. A hajókázást fagyizás követte. Este megkezdődtek a Fable Fennis (tulajdonképpen asztalitenisz) bajnokság küzdelmei. Két magyar páros, a Gáspár Botond és Lukács Lilla, illetve a Molnár-Sáska Zoltán és Simon Dániel alkotta párosok indultak el a versenyen.

Hétfő délután intenzíven zajlottak a sportversenyek. Fociban 2 hármas csoportban küzdöttek a csapatok. A magyar csapat egy győzelem után egy szoros mérkőzésen vereséget szenvedett a hollandoktól. A szerdai elődöntőben így a csapatvezetők csapata várt rájuk. A röplabdatorna 7 csapattal zajlott, teljes körmérkőzéssel. A frizbiversenyt a focihoz hasonlóan két hármas csoportban kezdték a csapatok. Hétfőn kezdődtek a küzdelmek röplabdában és frizbiben is. Vacsora után természetesen Fable Fennis mérkőzések, illetve sakk és tandemsakk fordulók is voltak.

Kedden egésznapos kirándulást tettünk Berlinben. Először a tábor összes lakója meglátogatta a Deutsches Technikmuseum Spectrum nevű részét, mely a Csodák Palotájához hasonló kiállítás. Nagyon sok fizikai jelenség szemléletes bemutatását kínálja az intézmény, és néhány matematikaiét is.

Ezután szabad program következett. A magyarok közösen városnézésbe kezdtek, gyalogosan vettük célba a berlini nevezetességek egy részhalmazát. Jártunk a berlini falnál egy szabadtéri múzeumban, a Checkpoint Charlie-nál, az Alexanderplatz-on, sétáltunk az Unter den Lindenen, láttunk a Holokauszt-emlékhelyet, és természetesen megnéztük a Brandenburgi-kaput, illetve az egykori Reichstag (ma Bundestag) épületét.

Este folytatódott a Fable Fennis torna és befejeződtek a sakk- és a tandemsakkverseny küzdelmei. A sakkversenyen Molnár-Sáska Zoltán veretlenül végzett az első helyen. Ugyanígy hibátlan mérleggel nyerte a tandemsakk tornát a Borbényi Márton – Molnár-Sáska Zoltán páros.

Szerda délután ismét sportesemények uralták a szabadidőt. A magyar csapat a focitorna elődöntőjében a későbbi győztes, csapatkísérőkből álló csapat ellen szenvedett vereséget, majd a harmadik helyért lejátszott mérkőzésen sima győzelmet aratott Szlovákia ellen, így harmadik helyen zárta a tornát. (A diákcsapatok rangsorában az előkelő második helyet szerezték meg.) A frizbiversenyen két vereséget követően nem jutott tovább a csapat az elődöntőkbe.

Este először a Fable Fennis tornán játszottak mérkőzéseket. A 3 csoportgyőztes játszott a csoportmásodikok ellen. Molnár-Sáska Zoltán és Simon Dániel bejutottak a legjobb három páros közé.

Ezt követően Peter Ypma, a holland csapat egyik kísérője tartott egy interaktív foglalkozást arról, hogy hogyan lehet vakon (nem látva a táblát) sakkozni.

Csütörtök délután a kb. 40 km-re lévő Templin városába utaztunk. Először egy termálfürdőt látogattunk meg, ahol 2 órán keresztül élvezhettük a fürdőhely szolgáltatásait. Majd pedig a középkori városközpontot kerestük fel, aminek fala épségben fennmaradt a 14. századból.

Vacsora után játszották le a Fable Fennis torna utolsó mérkőzéseit. Számunkra ez nagyon kedvezően alakult, mert a Molnár-Sáska Zoltán – Simon Dániel páros megnyerte a tornát.

Ezt követően Charles Dunn 9 matematikai rövidfilmet mutatott be a tábor résztvevői számára Math in Motion címmel. A filmek a következők voltak: The Dice, Not Knot, Outside In, The Shape of Space, Attack of Sheep Notes, Moebius Transformations, 120 Cells, Conform!, Borromean Rings.

Pénteken délután streetball verseny zajlott, amit az egyik szlovák diák kezdeményezésére rendeztek meg. A torna 2 négyes csoportban zajlott. Az egyik csoportot a magyar csapat, a másikat a tanárok csapata nyerte. A két elődöntőt követően ők ketten játszották a döntőt is, amit végül a magyar csapat nyert meg.

Ezt követően került sor a Team Competition feladatok megoldásainak ismertetésére, majd pedig a tábor résztvevőinek közös fotózására.

A vacsorát követően a záróünnepség következett. Ennek első részében minden nemzet egy zenés produkcióval szórakoztatta a többieket. Ezután kiderült a Team Competition végeredménye, illetve megkapták jól megérdemelt díjaikat a sport- és egyéb versenyek helyezettjei, illetve győztesei.

Résztvevők

A magyar küldöttség 9 tagú volt, hét diák és két kísérő képviselte az országot a táborban.

Diákok

Baran Zsuzsanna, Debrecen (3. csoport)
Borbényi Márton, Kaposvár (4. csoport)
Gáspár Botond, Veresegyház (2. csoport)
Lukács Lilla, Gödöllő (3. csoport)
Molnár-Sáska Zoltán, Budapest (1. csoport)
Nagy Botond, Zalaegerszeg (4. csoport)
Simon Dániel Gábor, Kecskemét (1. csoport)

Kísérők

Molnár-Sáska Gábor, Budapest
Juhász Péter, Budapest

1. In Worcestershire, Wire Piddle is 12 km south of the village of North Piddle and Abbotts Morton is 12 km east of North Piddle. What is the direction of Abbotts Morton from Wire Piddle?

(**A**) South East (**B**) South West (**C**) North East
(**D**) North West (**E**) West

2. In a magic square, each row, each column and both main diagonals have the same total. In the partially completed magic square shown, what number should replace x? C

18			
13	15		
	10	11	17
	x	16	14

(**A**) 15 (**B**) 18 (**C**) 21 (**D**) 24 (**E**) 27

3. In how many whole numbers between 100 and 999 is the middle digit equal to the sum of the other two digits? C

(**A**) 28 (**B**) 36 (**C**) 45 (**D**) 50 (**E**) 55

4. $ABCDEFGHI$ is a regular nine-sided polygon. What is the size of angle FAE? C

(**A**) 10° (**B**) 20° (**C**) 30° (**D**) 40° (**E**) 50°

5. You have six sticks of length 1 cm, 2 cm 3 cm, 2001 cm, 2002 cm and 2003 cm. If you were to choose three of these sticks to form a triangle, how many different choices of three sticks could you successfully make? B

(**A**) 1 (**B**) 3 (**C**) 5
(**D**) 6 (**E**) more than 20

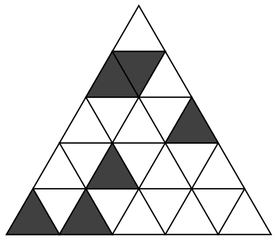
6. Mary had 6 cards with one positive whole number on each card. She choose 3 cards and worked out the total of the numbers. She replaced the three cards, selected another 3, worked out their total, until she had considered all of the 20 possible choices of 3 cards. Mary then discovered that 10 totals were equal to 16, and that the other 10 totals were equal to 18. What was the smallest number on the cards? D

(**A**) 4 (**B**) 3 (**C**) 2 (**D**) 1 (**E**) 0

7. The number of different pairs of integers (x, y), not necessarily positive, which satisfy the equation $(x+y)^2 = (x+3)(y-3)$ is

(**A**) 0 (**B**) 1 (**C**) 2 A
(**D**) 3 (**E**) infinitely many

8. The figure shows an equilateral triangle divided into small equilateral triangles, all equal. What is the lowest number of small triangles which must now be shaded to produce a figure which has a line of symmetry? B

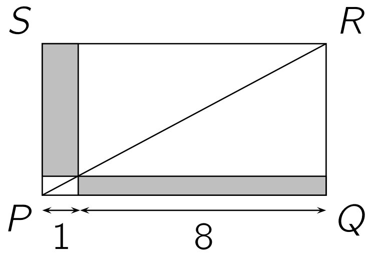


(**A**) 2 (**B**) 3 (**C**) 4 (**D**) 5 (**E**) 6

9. What is the greatest number of consecutive positive integers, none of which has the sum of digits divisible by 5? B

(**A**) 9 (**B**) 8 (**C**) 7 (**D**) 6 (**E**) 5

10. What fraction of the rectangle is shaded?



(**A**) $\frac{16}{81}$ (**B**) $\frac{4}{9}$ (**C**) $\frac{2}{9}$ (**D**) $\frac{1}{8}$ (**E**) $\frac{1}{9}$ B

11. A car was driven at a constant speed of 90 km/h. When the clock in the car showed 21:00, the daily mileage recorder showed 116.0, meaning that up to that moment 116.0 km had been driven. Later that evening the mileage recorder showed the same row of numbers as the clock. At what time did that occur? A

(**A**) 21:30 (**B**) 21:50 (**C**) 22:00 (**D**) 22:10 (**E**) 22:30

12. Three different numbers a, b, c are choosen from the set $\{1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28\}$. How many different answers for $a+b+c$ are there? D

(**A**) 13 (**B**) 21 (**C**) 22 (**D**) 30 (**E**) 120

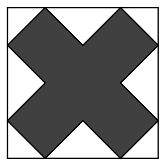
13. Five children are each asked to choose one of the numbers: one, two or four. When their chosen numbers are multiplied together, which one of the following numbers could be the result? C

(**A**) 100 (**B**) 256 (**C**) 768 (**D**) 1028 (**E**) 2048

14. How many numbers are there between 100 and 200 whose only prime factors are 2 and 3? B

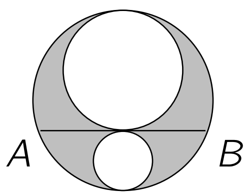
(**A**) 2 (**B**) 3 (**C**) 4 (**D**) 5 (**E**) 6

15. The diagram shows a square and an equilateral right-angled cross-shaped dodecagon. The length of the perimeter of the dodecagon is 36 cm. What is the area of the square in cm^2? D



(**A**) 48 (**B**) 72 (**C**) 108 (**D**) 115.2 (**E**) 144

16. The shaded area is equal to 2π. What is the length of AB? B



(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3
(**D**) 4 (**E**) impossible to determine

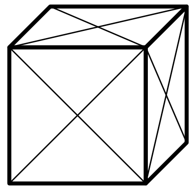
17. Given that

$$x = \frac{111110}{111111} \qquad y = \frac{222221}{222223} \qquad z = \frac{333331}{333334}$$

which of the following statements is correct? D

(**A**) $x < y < z$ (**B**) $x < z < y$ (**C**) $y < z < x$
(**D**) $z < x < y$ (**E**) $y < x < z$

18. The figure shows a cube of side 1 on which all twelve face diagonals have been drawn – creating a network with 14 vertices (the original eight corners, plus the six face centres) and 36 edges (the original twelve edges of the cube plus four extra edges on each face). What is the length of the shortest path along the edges of the network which passes through all 14 vertices?



(**A**) $1 + 6\sqrt{2}$ (**B**) $4 + 2\sqrt{2}$ (**C**) 6
(**D**) $8 + 6\sqrt{2}$ (**E**) $12 + 12\sqrt{2}$

B

19. Whilst waiting 19 minutes for Rachel, Andrew gets bored and begins to count the number of buses which pass him. A red bus passes every 3 minutes and a blue bus passes every 5 minutes. Andrew decides to focus on the difference between the number of red and blue buses which pass him. How many different such differences are possible?

(**A**) 0 (**B**) 1 (**C**) 2 (**D**) 3 (**E**) 4

A

20. If $a : b = 9 : 4$ and $b : c = 5 : 3$ what is the value of the ratio $(a - b) : (b - c)$?

(**A**) 7 : 12 (**B**) 25 : 8 (**C**) 4 : 1
(**D**) 5 : 2 (**E**) it cannot be determined

D

21. In Canada, some of the population can speak only English, some can speak only French, some can speak both languages but everyone speaks either French or English. In all, 85 % of the population speak English, and 75 % of the population speak French. What percentage of the population can speak both languages?

(**A**) 50 % (**B**) 57 % (**C**) 25 % (**D**) 60 % (**E**) 40 %

B

22. Coins have been placed in some of the small squares of a 2×9 grid. Each small square either contains a coin or has a side in common with a similar square containing a coin. What is the lowest number of coins that there can be in the grid?

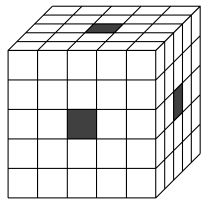
(**A**) 5 (**B**) 6 (**C**) 7 (**D**) 8 (**E**) 9

D

23. An international organisation has 32 members. Every year the number of members increases by 50 %. How many members will it have three years from now? A

(**A**) 182 (**B**) 128 (**C**) 108 (**D**) 96 (**E**) 80

24. A cube with edges of length 5 is made from small cubes with edges of length 1. The three complete rows of small cubes, shown shaded in the figure, are then removed and the resulting shape is then immersed in paint. How many cubes then have only one face painted? C



(**A**) 30 (**B**) 26 (**C**) 40 (**D**) 48 (**E**) 24

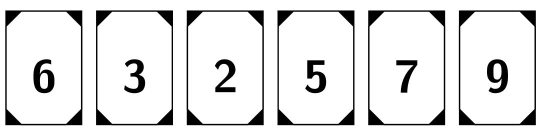
25. The numbers $\frac{1}{2}$, x, y, $\frac{3}{4}$ are in increasing order of size. The differences between successive numbers in this list are all the same. What is the value of y? E

(**A**) $\frac{3}{8}$ (**B**) $\frac{2}{3}$ (**C**) $\frac{7}{12}$ (**D**) $\frac{5}{6}$ (**E**) $\frac{5}{8}$

26. A certain number has exactly eight factors including 1 and itself. Two of its factors are 21 and 35. What is the number? B

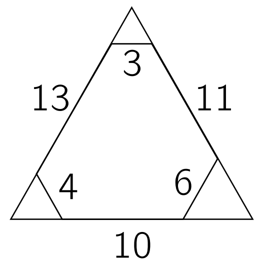
(**A**) 105 (**B**) 210 (**C**) 420 (**D**) 525 (**E**) 735

27. The six cards shown display the number 632579. One „turn“ consists of exchanging the positions of two adjacent cards so, for instance, after one „turn“ the cards could show 632759. Starting from the original 632579, what is the least number of „turns“ required so that the cards display a number which is divisible by 4? A



(**A**) 2 (**B**) 3 (**C**) 4 (**D**) 5 (**E**) 6

28. The diagram shows an irregular hexagon with interior angles all equal to 120° made by cutting the corners off a piece of card in the shape of an equilateral triangle with sides of length 20 units. An identical hexagon could also be made by cutting the corners off a different equilateral triangle: what is the side length of this triangle? B



(**A**) 23 (**B**) 25 (**C**) 27 (**D**) 29 (**E**) 31

29. A positive integer n is divisible by 21 and by 9. What is the smallest possible number of positive integers that divide n? C

(**A**) 3 (**B**) 4 (**C**) 5 (**D**) 6 (**E**) 7

30. The average of 16 different positive integers is 16. What is the greatest possible value that any of these integers could have? D

(**A**) 16 (**B**) 24 (**C**) 32 (**D**) 136 (**E**) 256

D

Werbellinsee Team Competition 2015

1. The two sequences $a_1 > a_2 > \ldots > a_n$ and $b_1 < b_2 < \ldots < b_n$ contain together each of the numbers $1, 2, \ldots, 2n$ exactly once.

   What is the sum $|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \ldots + |a_n - b_n|$?

2. Two circles intersect in points A and B. Their common tangent nearer B touches the circles at points E and F, and intersects AB at the point M. The point K is chosen on AM so that $|KM| = |MA|$. The line KE intersects the circle containing E again at the point C. The line KF intersects the circle containing F again at the point D.

   Prove that the points A, C and D are collinear.

3. A regular 2016-gon with sidelength 1 cm is decomposed into parallelograms.

   (a) Proof that at least one of those parallograms is a rectangle.

   (b) What is the sum of the areas of all the rectangles in the decomposition?

4. Alex, Jitka and Johannes are playing a game of chance. At the beginning each of them chooses a number: Alex chooses the number 61, Jitka the number 36 and Johannes the number 44. Then a dice is rolled again and again. The results of these rolls are written down next to each other. So, if the numbers 4, 3, 1 and 6 are thrown in this order, the number 4316 is written down. A player wins if his or her number can be seen somewhere in the written series. Then the game ends.

   (a) Who has the best odds to win this game?

   (b) Who is least likely to win this game?

   Remark: We don't ask for the precise chances. Though, give a mathematical argument why a certain player has a higher probability to win.

5. The real number x between 0 and 1 has decimal representation

   $$0, a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots$$

   with the following property: The number of *distinct* blocks of the form

   $$a_k a_{k+1} a_{k+2} \ldots a_{k+2014},$$

   as k ranges through all positive integers, is less than or equal to 2015.

   Prove that x is rational.

Deadline: Thursday, 8:42 o'clock